

Sistemas Lineales II.

Quinto Semestre.

Carrera: Ingeniería Electrónica.

Instituto Tecnológico Superior

Alumno:

Titular:

Contenido.

Introducción.

En la industria, como en las comunidades existen variables (necesidades) que necesitan ser controladas, ya sea un tanque de agua, el encendido de una lámpara, hasta el buen funcionamiento de una planta eléctrica, o una fábrica. Por esta razón muy sencilla, en nuestros sistemas de estudios se ha implementado estudiar los sistemas de control.

En esta asignatura podremos conocer el buen funcionamiento de un sistema, y podremos predecir un evento, de acuerdo con los datos ya obtenidos anteriormente.

Como ya se menciona antes, los sistemas de control se usan en cualquier lugar y cualquier momento, ya que día a día existen nuevas necesidades que se desean controlar, o resolver.

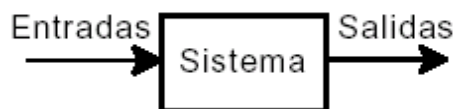
En esta pequeña monografía se tratara de explicar el funcionamiento de un sistema de control, así como de los métodos más importantes para obtener respuestas estables de un sistema.

Unidad 1.

Fundamentos.

Sistema: Combinación de componentes que actúan conjuntamente para alcanzar un objetivo particular.

Sistema de control: Sistema cuyo objetivo es el control manual o automático de cierta cantidad o variable física.



Entrada: Estímulo, excitación o mandato aplicado para producir una respuesta específica del sistema.

Salida: Respuesta real del sistema. Puede coincidir o no con la respuesta del sistema, implícita en la entrada correspondiente.

Clasificación de los sistemas

Tipo de respuesta:

- **Determinísticos:** Conocidos la entrada y el modelo del sistema se puede determinar la salida de un modo preciso.
- **No determinísticos:** No es posible conocer los estados por los que pasa el sistema y por tanto desconocemos la respuesta (salida).
- **Probabilísticos:** La respuesta del sistema está sujeto a algún criterio probabilística.
- **Difusos:** Dado el valor de la entrada, existe un cierto rango de valores posibles para la salida.

Clasificación de sistemas realizada en función de las características de la planta:

A. Sistemas Lineales – No–lineales. En rigor la mayoría de los sistemas de control son no– lineales. Sin embargo, en un punto de operación puede asumirse lineal, en cuyo caso se obtiene un modelo lineal con el cual se puede trabajar (en el motor de c. c. se asume *if* constante para obtener un sistema lineal).

B. Sistemas Invariantes – Variantes. Los invariantes son aquellos que tienen parámetros que no varían con el tiempo. Su respuesta no cambia para una entrada dada en función del tiempo (la masa $m(t)$ de un cohete).

C. Sistemas Continuos – Discretos. En un sistema continuo todas las variables son función de un tiempo continuo. Los discretos se caracterizan por tener valores en instantes fijos (el valor de la UF es discreto).

D. Sistemas SISO – MIMO. Los SISO (Single Input Simple Output) tienen una entrada y una salida. Los MIMO tienen varias entradas y varias salidas (SISO: motor con $if = cte$, MIMO: generador).

E. Sistemas de Parámetros Concentrados – Distribuidos. Los sistemas que pueden describirse mediante ecuaciones diferenciales ordinarias son con parámetros concentrados. Los que deben describirse mediante ecuaciones diferenciales parciales son con parámetros distribuidos (temperatura en una barra: $\frac{\partial T}{\partial x} = k \frac{\partial T}{\partial t}$).

).

F. Sistemas Determinísticos – Estocásticos. Es determinístico si la respuesta a la entrada es predecible y repetible; de no serlo, es estocástico.

Tipo de variable:

- **Continuos:** Todas las variables del sistema son continuas en el tiempo (sistemas basados en ecuaciones diferenciales).
- **Discretos:** El valor de una o más variables sólo se conoce en instantes discretos de tiempo (sistemas basados en ecuaciones en diferencias).
- **Muestreados:** Dada una señal, tomamos su valor en determinados instantes de tiempo.
- **Digitales:** La señal toma valores como combinación de un conjunto discreto de valores.

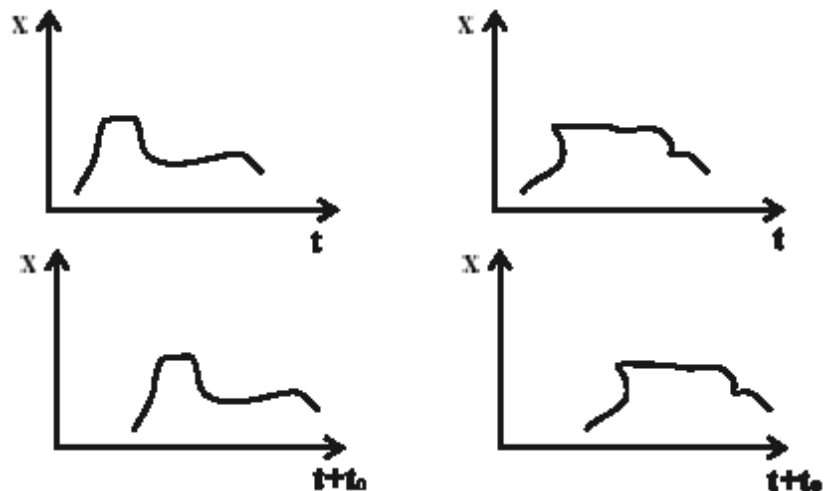
Relación entrada/salida

- **Lineales:** La salida es una función lineal de la entrada. Verifica el principio de superposición
- **No lineales:** La salida no se puede representar como una función lineal de la entrada.

La mayor parte de los sistemas reales son no lineales. Sin embargo generalmente se pueden aproximar a sistemas lineales por trozos.

Variación temporal de los parámetros

- Invariantes: La respuesta del sistema es independiente del instante en el que se le aplique la entrada.
- No invariantes: Los parámetros del sistema varían con el tiempo(por ejemplo, resistencias que se calientan, guiado de un cohete,...)



Tipo de control:

- Lazo abierto: Control independiente de la salida y de las variables del sistema (por ejemplo una tostadora).
- Lazo cerrado: Control dependiente de la salida y/o de las variables del sistema (por ejemplo un sistema de aire acondicionado).

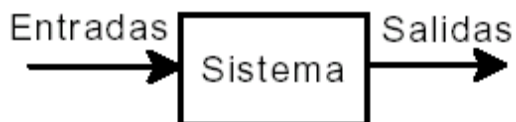
Para clasificar un sistema en lazo abierto o lazo cerrado debemos distinguir claramente entre los componentes del sistema y los que interactúan con él, pero que no hacen parte del sistema.

Sistemas de control en lazo abierto (SCLA)

Características:

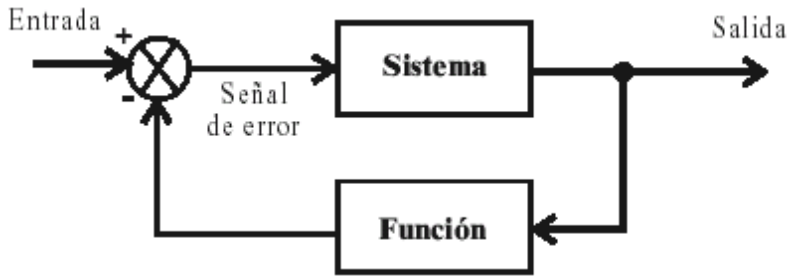
1. Su precisión de operación viene determinada por su calibración. *
2. Generalmente no presentan problemas de inestabilidad.
3. Son relativamente fáciles de analizar y de diseñar

* Calibrar significa establecer o reestablecer la relación entrada/salida para obtener una exactitud deseada del sistema.



Sistemas de control en lazo cerrado (SCLC)

SCLC! Sistemas con una o varias líneas de realimentación.

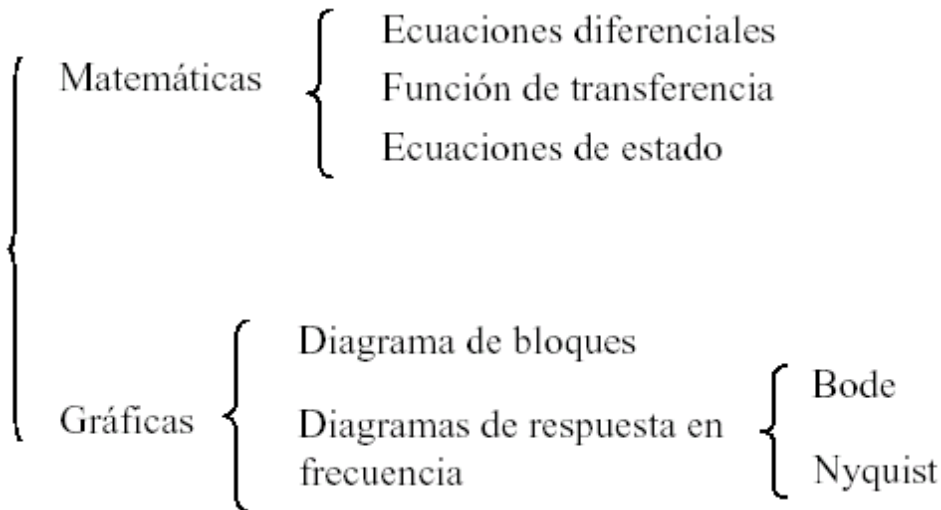


1. Mayor precisión.
2. Tendencia a la inestabilidad o la oscilación.
3. Mayor robustez frente a las variaciones de los parámetros.
4. Diseño más complejo.

*Realimentación es la propiedad de los sistemas de control en lazo cerrado que permite que la salida (o alguna variable controlada) se compare con la entrada del sistema (o una entrada de algún otro componente o subsistema) de tal forma que la acción de control apropiada se puede formar como alguna función de la entrada y la salida.

Representación, análisis y síntesis de sistemas

Representar un sistema supone obtener un modelo matemático que describa su dinámica de comportamiento.



Análisis: Investigación de las propiedades de un sistema existente.

Diseño: Elección y ordenamiento de componentes del sistema para desarrollar una tarea específica.

Diseño por análisis: Modificación de las características de un sistema existente o estándar

Diseño por síntesis: Desarrollo del sistema directamente de las especificaciones.

1. Sistema Lineal: La salida es una función lineal de la entrada. Verifica el principio de superposición.

$$\text{Sean } \left\{ \begin{array}{l} x(t) = a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t) + \dots + a_n x_n(t) \\ y_1(t) \rightarrow \text{Respuesta a } x_1(t) \\ y_2(t) \rightarrow \text{Respuesta a } x_2(t) \\ \dots \\ y_n(t) \rightarrow \text{Respuesta a } x_n(t) \end{array} \right. \Rightarrow \begin{array}{l} y(t) = a_1 y_1(t) + a_2 y_2(t) + \dots + a_n y_n(t) \\ y(t) \rightarrow \text{Respuesta a } x(t) \end{array}$$

2. Sistema Continuo: Todas las variables del sistema son continuas en el tiempo (sistemas basados en ecuaciones diferenciales).

Función de transferencia y función ponderatriz

Sea un sistema lineal e invariante en el tiempo (LIT) con una entrada $u(t)$ y una salida $y(t)$. Su comportamiento vendrá descrito por una ecuación diferencial lineal de coeficientes constantes:

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = c_m \frac{d^m u(t)}{dt^m} + c_{m-1} \frac{d^{m-1} u(t)}{dt^{m-1}} + \dots + c_1 \frac{du(t)}{dt} + c_0 u(t)$$

donde todas las a_i y c_i son constantes.

Conocida la entrada $u(t)$ y un conjunto suficiente de condiciones iniciales, la respuesta del sistema se obtiene mediante la resolución de la ecuación diferencial (o sistema de ecuaciones) asociada.

Aplicamos la transformada de Laplace (y consideramos condiciones iniciales nulas):

$$s^n Y(s) + a_{n-1} s^{n-1} Y(s) + \dots + a_1 s Y(s) + a_0 Y(s) = c_m s^m U(s) + c_{m-1} s^{m-1} U(s) + \dots + c_1 s U(s) + c_0 U(s)$$

Función de transferencia del sistema, $G(s)$:

$$G(s) = \left. \frac{Y(s)}{U(s)} \right|_{c.t. nulas} = \frac{c_m s^m + c_{m-1} s^{m-1} + \dots + c_1 s + c_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}$$

$G(s)$ contiene todos los coeficientes de la ecuación diferencial original ! caracteriza totalmente al sistema

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \mathcal{L}^{-1}[G(s)U(s)]$$

Factorización.

Fracciones parciales.

$G(s)$! Cociente de polinomios* !

Principio de superposición.

Tablas de transformadas.

* Cualquier sistema físicamente realizable se puede modelar mediante una función de transferencia donde el grado del numerador es menor o igual que el grado del denominador (función propia).

$$G(s) = K \frac{(s + z_1)(s + z_2) \cdots (s + z_m)}{(s + p_1)(s + p_2) \cdots (s + p_n)} = K \frac{N(s)}{D(s)}$$

- El conjunto de valores de $s\{z_1, z_2, \dots, z_m\}$ que anulan el numerador de $G(s)$! Ceros de $G(s)$
- El conjunto de valores de $s\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ que anulan el denominador de $G(s)$ ® Polos de $G(s)$

Dado un sistema caracterizado por una función de transferencia $G(s)$. Para una entrada *impulso unitario* $u(t) = \delta(t)$ (Delta de Dirac), la respuesta será la transformada inversa de la propia función $G(s)$:

$$Y(s) = G(s)U(s) = G(s)\mathcal{L}[u(t)] = G(s)\mathcal{L}[\delta(t)] = G(s) \cdot 1 = G(s)$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(s)] = g(t)$$

La función $g(t)$ se denomina *función ponderatriz* o *respuesta impulsional*

$G(s)$ caracteriza el sistema en el dominio complejo de s .

$g(t)$ caracteriza el sistema en el dominio del tiempo.

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \mathcal{L}^{-1}[G(s)U(s)] = g(t) * u(t)$$

donde (teorema de convolución):

$$g(t) * u(t) = \int_0^t u(\tau)g(t - \tau)d\tau = \int_0^t u(t - \tau)g(\tau)d\tau$$

Diagrama de bloques: álgebra de los diagramas de bloques

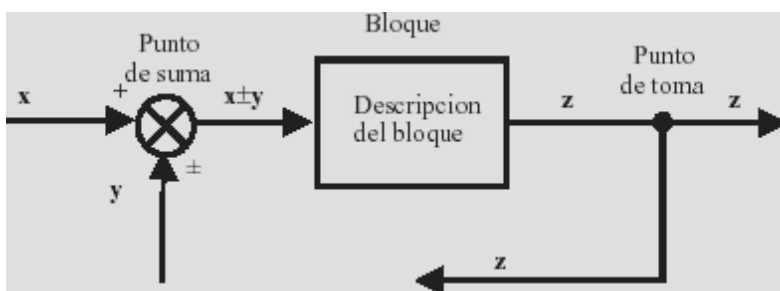
Diagrama de bloques: Técnica de representación de sistemas, basado en la combinación de cuatro tipos de elementos:

Bloques.

Puntos de suma (resta).

Puntos de bifurcación.

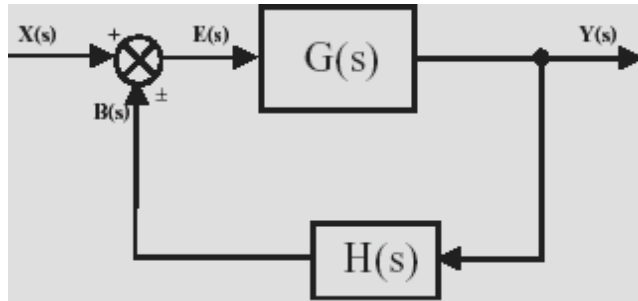
Flechas de flujo unidireccional.



Letra minúscula ! dominio del tiempo

Letra mayúscula ! dominio transformado

Términos típicamente utilizados en diagramas de bloques:



$X(s)$ " Entrada de referencia

$Y(s)$ " Salida del sistema

$B(s)$ " Señal de retorno

$E(s)$ " Señal de error

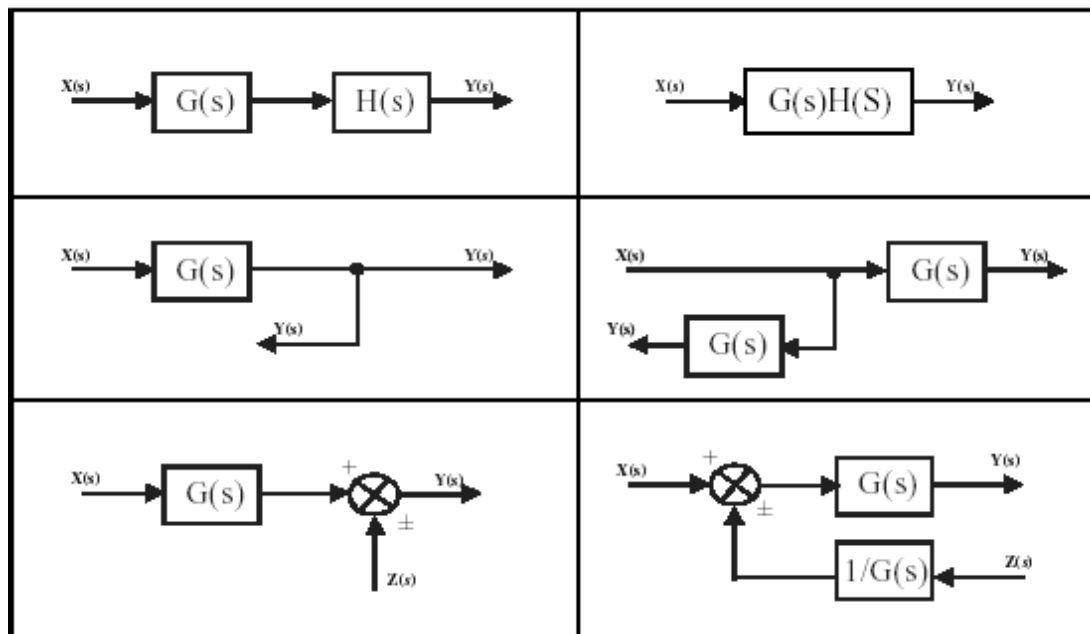
$G(s) = Y(s)/E(s)$ " Función de transferencia de la cadena directa

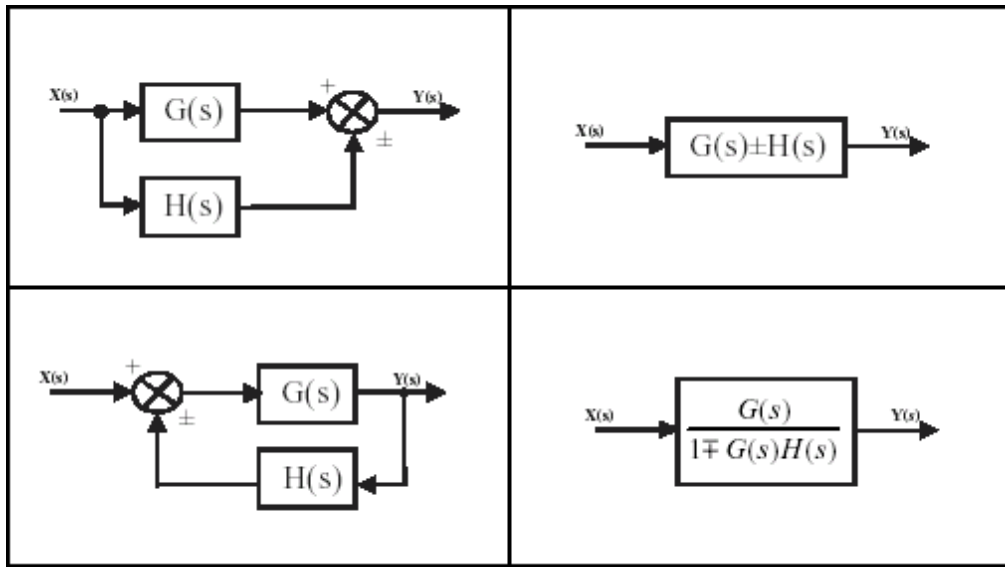
$M(s) = Y(s)/X(s)$ " Función de transferencia de la cadena cerrada

$H(s) = B(s)/Y(s)$ " Función de transferencia de la cadena de retorno

$G(s)H(s)$ " Función de transferencia de la cadena abierta

Reglas de transformación de diagramas de bloques





Unidad II.

Respuesta a la Frecuencia.

Introducción

Respuesta en frecuencia: Respuesta en el estado estacionario de un sistema ante una entrada sinusoidal.

Cualquier entrada se puede descomponer mediante la transformada de Fourier en un conjunto de armónicos.

Si conocemos la respuesta del sistema conocemos la respuesta a cualquier entrada (principio de superposición).

Metodología: Variar la frecuencia de la señal de entrada dentro del rango de interés y estudiar la respuesta resultante.

Función respuesta en frecuencia.

Para una entrada senoidal tenemos:

$$u(t) = A \sin(\omega t) \rightarrow U(s) = A \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

Sea un sistema caracterizado por una función de transferencia $G(s)$

$$Y(s) = G(s)U(s) = A \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} G(s)$$

Factorizando:

$$Y(s) = \frac{a_1}{s + j\omega} + \frac{a_2}{s - j\omega} + \sum_{i=1}^n T_i(s)$$

Transformada inversa:

$$y(t) = a_1 e^{-j\omega t} + a_2 e^{j\omega t} + \sum_{i=1}^n \mathbf{L}^{-1}[T_i(s)]$$

Sistema estable

Respuesta estacionaria: $y_e(t) = a_1 e^{-j\omega t} + a_2 e^{j\omega t}$

Por tanto:

Respuesta transitoria:

Obtención de a1 y a2:

$$a_1 = G(s)A \frac{\omega}{s - j\omega} \Big|_{s=-j\omega} = -\frac{AG(-j\omega)}{2j}$$

$$a_2 = G(s)A \frac{\omega}{s + j\omega} \Big|_{s=j\omega} = \frac{AG(j\omega)}{2j}$$

Definimos

$$\begin{cases} M = |G(j\omega)| \\ \varphi = \text{Arg}[G(j\omega)] = \text{arctg} \frac{\text{Im}[G(j\omega)]}{\text{Re}[G(j\omega)]} \end{cases}$$

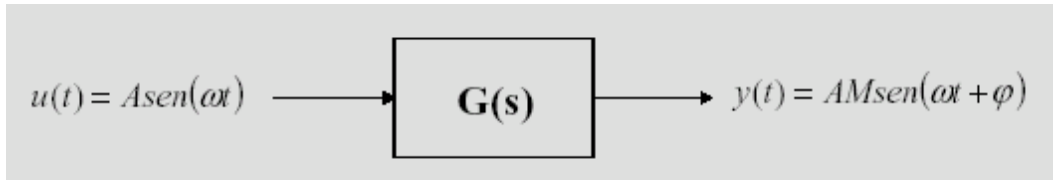
De modo que

$$G(j\omega) = M(\cos \varphi + j \text{sen} \varphi) = M e^{j\varphi}$$

Con lo que queda

$$\begin{aligned} y_e(t) &= A \left[-\frac{G(-j\omega)}{2j} e^{-j\omega t} + \frac{G(j\omega)}{2j} e^{j\omega t} \right] = AM \left[-\frac{e^{-j\varphi}}{2j} e^{-j\omega t} + \frac{e^{j\varphi}}{2j} e^{j\omega t} \right] = \\ &= AM \left[\frac{e^{j(\varphi+\omega t)} - e^{-j(\varphi+\omega t)}}{2j} \right] = AM \text{sen}(\omega t + \varphi) \end{aligned}$$

Conclusión



$$G(s) \rightarrow G(j\omega) \rightarrow \begin{cases} M = |G(j\omega)| \\ \varphi = \text{Arg}[G(j\omega)] \end{cases}$$

Respuesta en frecuencia de un sistema: Respuesta estable ante una entrada sinusoidal. En un sistema lineal la salida estable será también una sinusoidal que sólo difiere de la entrada en amplitud y fase.

La función de transferencia G(s) particularizada para s = jw: Función respuesta en frecuencia.

Tipos de representación gráfica de G(jw)

1. Representación módulo–argumental

- Diagrama de Bode: Consiste en dos gráficas que dan $|G(jw)|$ y $\text{Arg } G(jw)$ en función de w. Usa escala logarítmica para $|G(jw)|$ y w y escala natural para $\text{Arg } G(jw)$.
- Diagrama de Black: Representa $|G(jw)|$ en escala logarítmica frente $\text{Arg } G(jw)$ escala natural.

2. Representación compleja o polar

- Diagrama de Nyquist: Representa la parte real de G(jw) frente a la imaginaria variando w entre cero e infinito.

Diagramas de Bode

Sea un sistema caracterizado por la función de transferencia siguiente:

$$G(s) = \frac{K(s + z_1) \cdots (s + z_m)}{(s + p_1) \cdots (s + p_n)}$$

A partir de ella obtenemos G(jw) cuyos términos pueden ser:

1. Ganancia K

2. Polos y ceros en el origen

$$z_i = 0, p_i = 0 \Rightarrow s^{\pm n} \xrightarrow{s=j\omega} (j\omega)^{\pm n}$$

3. Polos y ceros reales de multiplicidad n:

$$z_i, p_i \text{ reales} \Rightarrow (s + \sigma)^{\pm n} = \sigma^{\pm n} \left(1 + \frac{s}{\sigma}\right)^{\pm n} \xrightarrow{s=j\omega} \sigma^{\pm n} \left(1 + \frac{j\omega}{\sigma}\right)^{\pm n}$$

Definimos $T=1/\sigma$,
constante de tiempo

4. Polos y ceros complejos conjugados de multiplicidad n:

$$\begin{aligned} (s + \alpha + j\omega_p)(s + \alpha - j\omega_p) &= s^2 + 2\underbrace{\alpha}_{\delta\omega_n} s + \underbrace{(\omega_p^2 + \alpha^2)}_{\omega_n^2} = \\ &= s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2 = \omega_n^2 \left(\frac{s^2}{\omega_n^2} + \frac{2\delta s}{\omega_n} + 1 \right) \xrightarrow{s=j\omega} \omega_n^2 \left[\left(\frac{j\omega}{\omega_n} \right)^2 + j \frac{2\delta\omega}{\omega_n} + 1 \right] \end{aligned}$$

Por tanto la función respuesta en frecuencia será:

$$G(j\omega) = K' \frac{\prod_t (j\omega + \sigma_t) \prod_k \left[\left(\frac{j\omega}{\omega_{nk}} \right)^2 + j \frac{2\delta_k \omega}{\omega_{nk}} + 1 \right] (j\omega)^l}{\prod_q (j\omega + \sigma_q) \prod_r \left[\left(\frac{j\omega}{\omega_{nr}} \right)^2 + j \frac{2\delta_r \omega}{\omega_{nr}} + 1 \right] (j\omega)^l}$$

$$K' = K \frac{\prod_k \omega_{nk}^2}{\prod_r \omega_{nr}^2}$$

G (jw) en la forma de las constantes de tiempo

$$G(j\omega) = K'' \frac{\prod_t (1 + j\omega T_t) \prod_k \left[\left(\frac{j\omega}{\omega_{nk}} \right)^2 + j \frac{2\delta_k \omega}{\omega_{nk}} + 1 \right] (j\omega)^l}{\prod_q (1 + j\omega T_q) \prod_r \left[\left(\frac{j\omega}{\omega_{nr}} \right)^2 + j \frac{2\delta_r \omega}{\omega_{nr}} + 1 \right] (j\omega)^l}$$

$$K'' = K' \frac{\prod_i \sigma_i}{\prod_q \sigma_q}$$

Módulo de G(jw) en decibelios (dB)

$$|G(j\omega)|_{dB} = 20 \log|G(j\omega)| = 20 \log|K^n| + 20 \sum_t \log|1 + j\omega T_t| +$$

$$+ 20 \sum_k \log \left| \left(\frac{j\omega}{\omega_{nk}} \right)^2 + j \frac{2\delta_k \omega}{\omega_{nk}} + 1 \right| + 20l \log|j\omega| - 20 \sum_q \log|1 + j\omega T_q| -$$

$$- 20 \sum_r \log \left| \left(\frac{j\omega}{\omega_{nr}} \right)^2 + j \frac{2\delta_r \omega}{\omega_{nr}} + 1 \right| - 20t \log|j\omega|$$

Fase de G(jw)

$$Arg(G(j\omega)) = Arg[K^n] + \sum_t Arg[1 + j\omega T_t] +$$

$$+ \sum_k Arg \left[\left(\frac{j\omega}{\omega_{nk}} \right)^2 + j \frac{2\delta_k \omega}{\omega_{nk}} + 1 \right] + l Arg[j\omega] - \sum_q Arg[1 + j\omega T_q] -$$

$$- \sum_r Arg \left[\left(\frac{j\omega}{\omega_{nr}} \right)^2 + j \frac{2\delta_r \omega}{\omega_{nr}} + 1 \right] - t Arg[j\omega]$$

Por lo tanto para obtener los diagramas de Bode

1. Normalizamos G(jw).
2. Representamos los diagramas asociados a cada término.
3. Sumamos gráficamente la contribución de cada término.

Algunos términos no tienen una representación sencilla por lo que se recurre a una representación asintótica.

La curva real se obtendrá corrigiendo los errores introducidos por la representación asintótica.

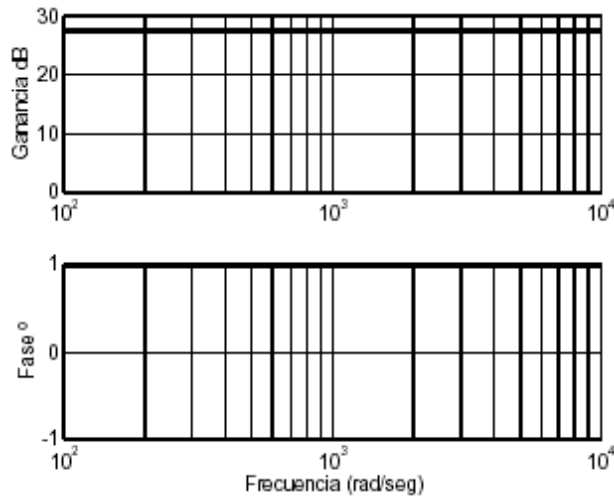
Diagrama de Bode: Representación asintótica

1. Término constante (Kⁿ)

Contribuye con:

$$Amp = 20 \log|K^n| = cte \begin{cases} > 0 dB & si |K^n| > 1 \\ < 0 dB & si |K^n| < 1 \end{cases}$$

$$Arg = \begin{cases} 0 & \text{si } K'' > 0 \\ 180^\circ & \text{si } K'' < 0 \end{cases}$$



2. Polos y ceros en el origen $(j\omega)^{\pm n}$

Amplitud:

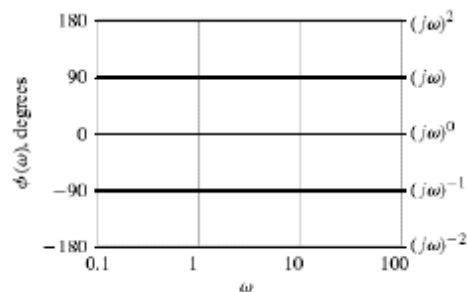
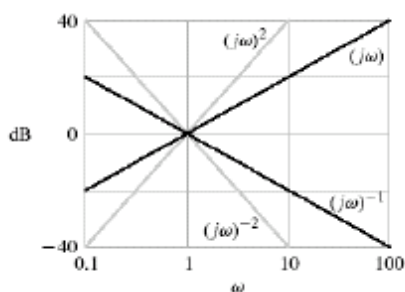
$$Amp = 20 \log |(j\omega)^{\pm n}| = \pm 20n \log(\omega)$$

Recta en coordenadas logarítmicas que pasa por el origen ($\log(\omega) = 0$ ó $\omega = 1$) con pendiente:

$$\frac{d(\pm 20n \log(\omega))}{d(\log(\omega))} = \pm 20n \text{ dB/dec}$$

Fase:

$$Arg(j\omega)^{\pm n} = \pm n 90^\circ$$



3. Polos y ceros reales de multiplicidad n $(1 + j\omega T)^{\pm n}$

Amplitud:

$$Amp = 20 \log |(1 + j\omega T)^{\pm n}| = \pm 20n \log |1 + j\omega T| = \pm 20n \log (\sqrt{1 + \omega^2 T^2})$$

Aproximación asintótica:

a. Frecuencias muy bajas

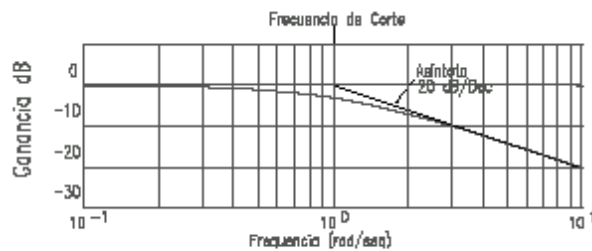
$$\omega T \ll 1 \Rightarrow Amp \approx \pm 20n \log 1 = 0 \text{ dB}$$

b. Frecuencias muy altas

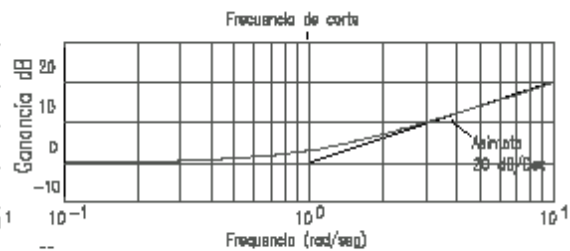
$$\omega T \gg 1 \Rightarrow Amp \approx \pm 20n \log \sqrt{\omega^2 T^2} = \pm 20n \log |\omega T| = \pm 20n \log |\omega| \pm 20n \log |T|$$

Corte entre asíntotas

$$\pm 20n \log |\omega T| = 0 \Rightarrow \omega_c = \frac{1}{T} = \sigma$$



$$\frac{1}{(1 + j\omega T)}$$



$$(1 + j\omega T)$$

Máximo error en la aproximación asintótica entorno a $\omega_c \Rightarrow 3 \text{ dB}$

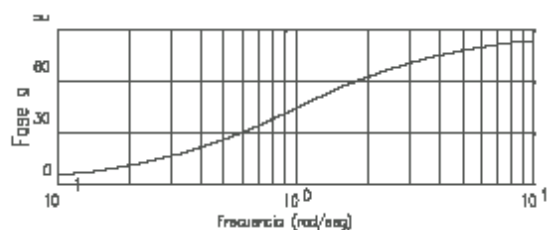
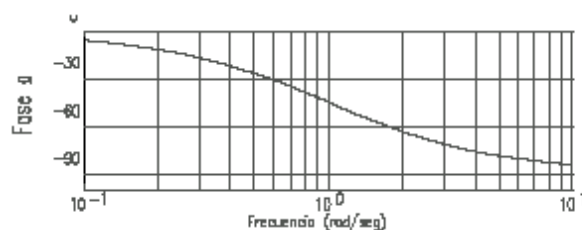
Frecuencia de corte

Fase:

$$Arg(1 + j\omega T)^{\pm n} = \pm n \arctg(\omega T)$$

Aproximación asintótica:

- Frecuencias muy bajas: Recta de 0° hasta un década por debajo de c .
- Frecuencias muy altas: Recta de $\pm n 90^\circ$ desde una década por encima de c .



$$\frac{1}{(1+j\omega T)}$$

$$(1+j\omega T)$$

4. Polos y ceros complejos de multiplicidad n

$$\left[1 + 2j\delta \frac{\omega}{\omega_n} - \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 \right]^{\pm n}$$

Amplitud:

$$\begin{aligned} Amp &= 20 \log \left| 1 + 2j\delta \frac{\omega}{\omega_n} - \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 \right|^{\pm n} = \pm 20n \log \left| \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \right) + j \left(2\delta \frac{\omega}{\omega_n} \right) \right| = \\ &\pm 20n \log \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \right)^2 + \left(2\delta \frac{\omega}{\omega_n} \right)^2} \end{aligned}$$

Aproximación asintótica:

a. Frecuencias muy bajas

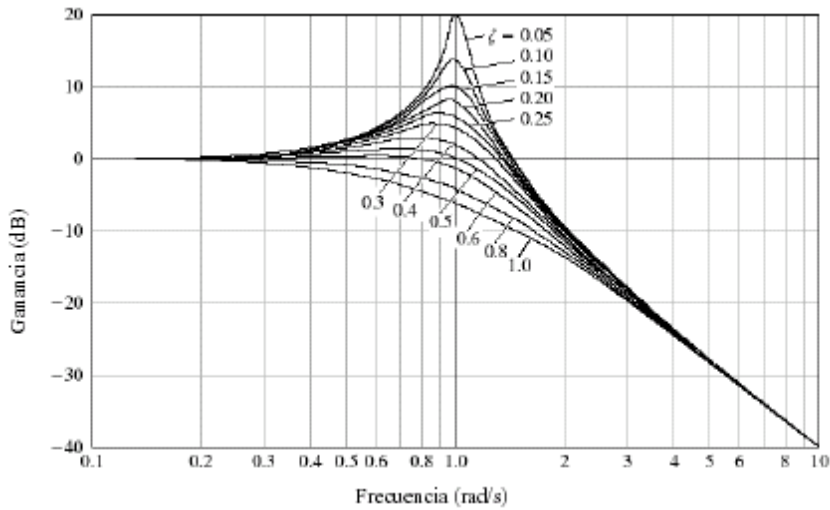
$$\frac{\omega}{\omega_n} \ll 1 \Rightarrow Amp \approx \pm 20n \log 1 = 0 \text{ dB}$$

b. Frecuencias muy altas

$$\frac{\omega}{\omega_n} \gg 1 \Rightarrow Amp \approx \pm 20n \log \sqrt{\left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^4} = \pm 40n \log \left| \frac{\omega}{\omega_n} \right| = \pm 40n \log |\omega| \pm 40n \log |\omega_n|$$

Corte entre asíntotas:

$$\pm 40n \log \left| \frac{\omega_c}{\omega_n} \right| = 0 \Rightarrow \omega_c = \omega_n$$



El error cometido en la frecuencia de corte ω_c depende fuertemente del coeficiente de amortiguamiento δ .

$$\omega_c = \omega_n \Rightarrow Amp = \pm 20n \log \sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega_c}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + \left(\frac{2\delta\omega_c}{\omega_n}\right)^2} = 20n \log|2\delta|$$

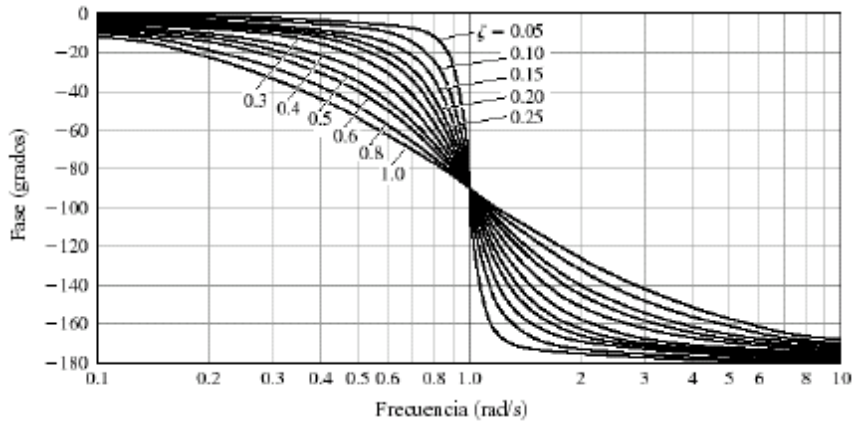
Fase:

$$\text{Arg} \left[1 + 2j\delta \frac{\omega}{\omega_n} - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 \right]^{\pm n} = \pm n \text{arctg} \left[\frac{2\delta \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \right]$$

Aproximación asintótica:

- a. Frecuencias muy bajas: Recta de 0° hasta una década por debajo de ω_c
- b. Frecuencias muy altas: Recta de $\pm n 180^\circ$ desde una década por encima de ω_c

Fase:



Diagramas de Nyquist:

Representación en coordenadas polares de la parte real de $G(j\omega)$ frente a la imaginaria variando entre cero e infinito.

Sistemas de primer orden

$$G(s) = \frac{1}{1+sT} \Rightarrow G(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega T}$$

Obtenemos la representación polar:

$$G(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega T} = \frac{1-j\omega T}{1-(-\omega^2 T^2)} = \frac{1-j\omega T}{1+\omega^2 T^2}$$

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2 T^2}} \quad \text{Arg}[G(j\omega)] = -\arctg(\omega T)$$

Representación polar de $G(j\omega)$:

$$G(j\omega) = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2 T^2}} \angle -\arctg(\omega T)$$

Tenemos que dibujar los valores de $G(j\omega)$, componentes real e imaginaria, sobre el plano complejo para distintas frecuencias. Para facilitar la tarea el comportamiento asintótico en $\omega=0$ y $\omega \rightarrow \infty$.

- Para $\omega=0$: $G(j\omega)|_{\omega=0} = 1 \angle 0^\circ$

Sobre el eje real, en el punto 1.

- Para $\omega \rightarrow \infty$: $G(j\omega)|_{\omega \rightarrow \infty} = 0 \angle -90^\circ$

Parte real e imaginaria tienden a cero (punto (0,0)) llegando por el eje imaginario.

Sustituyendo el resto de valores intermedios se obtiene la ecuación de una circunferencia:

$$G(j\omega) = R + jI = \frac{1}{1 + j\omega T} = \frac{1 - j\omega T}{1 - (-\omega^2 T^2)} = \frac{1 - j\omega T}{1 + \omega^2 T^2} = \frac{1}{1 + \omega^2 T^2} - j \frac{\omega T}{1 + \omega^2 T^2}$$

$$R = \frac{1}{1 + \omega^2 T^2}$$

$$I = -\frac{\omega T}{1 + \omega^2 T^2}$$

$$R^2 + I^2 = \frac{1 + \omega^2 T^2}{(1 + \omega^2 T^2)^2} = \frac{1}{1 + \omega^2 T^2} = R$$

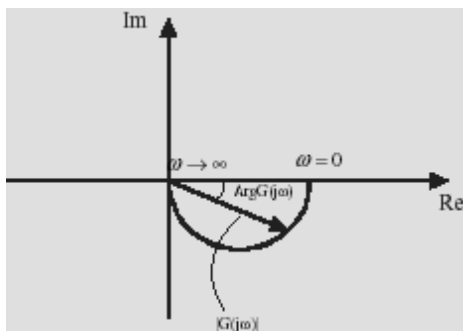
Por tanto

$$R^2 + I^2 - R = 0 \Rightarrow \left(R - \frac{1}{2}\right)^2 + I^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

Ecuación de una circunferencia de:

$$\begin{cases} \text{centro: } \left(\frac{1}{2}, 0\right) \\ \text{radio: } \frac{1}{2} \end{cases}$$

Polo ! Argumento siempre negativo ! Semicircunferencia de coordenadas negativas.



Adición de polos reales simples

$$\left(G'(s) = \frac{G(s)}{1 + sT} \right)$$

$$G'(j\omega) = \frac{G(j\omega)}{1 + j\omega T} = \frac{|G(j\omega)|}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}} \angle [Arg(G(j\omega)) - \text{arctg}(\omega T)]$$

Comportamiento asintótico:

- Para $\omega \rightarrow \infty$:

$$G'(j\omega) \Big|_{\omega \rightarrow \infty} = \frac{|G(j\omega)|_{\omega \rightarrow \infty}}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2} \Big|_{\omega \rightarrow \infty}} \angle [Arg(G(j\omega)) \Big|_{\omega \rightarrow \infty} - \arctg(\omega T) \Big|_{\omega \rightarrow \infty}] \Rightarrow$$

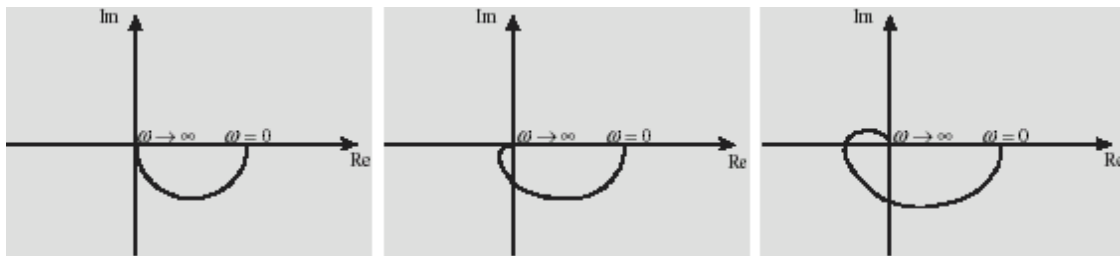
$$\Rightarrow G'(j\omega) \Big|_{\omega \rightarrow \infty} = 0 \angle [Arg(G(j\omega)) \Big|_{\omega \rightarrow \infty} - 90^\circ]$$

- Para $\omega = 0$:

$$G'(j\omega) \Big|_{\omega=0} = \frac{|G(j\omega)|_{\omega=0}}{1} \angle [Arg(G(j\omega)) \Big|_{\omega=0} - 0^\circ]$$

En conclusión, la adicción de n polos reales:

1. No afecta a bajas frecuencias.
2. Provoca un cambio de fase de $-n90^\circ$ a altas frecuencias ($\omega \rightarrow \infty$)



$$G(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega T}$$

$$\frac{G(j\omega)}{1 + j\omega T_1}$$

$$\frac{G(j\omega)}{(1 + j\omega T_1)(1 + j\omega T_2)}$$

Adición de polos en el origen

$$\left(G'(s) = \frac{G(s)}{s^n} \right)$$

$$G'(j\omega) = \frac{G(j\omega)}{(j\omega)^n} = \frac{|G(j\omega)|}{\omega^n} \angle [Arg(G(j\omega)) - n90^\circ]$$

Comportamiento asintótico:

- Para $\omega \rightarrow \infty$:

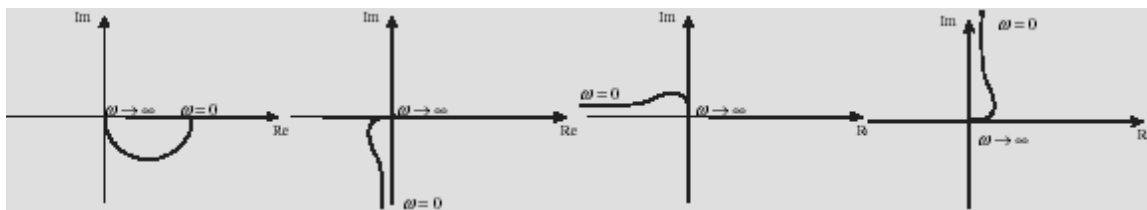
$$G'(j\omega) \Big|_{\omega \rightarrow \infty} = \frac{|G(j\omega)|_{\omega \rightarrow \infty}}{\omega^n \Big|_{\omega \rightarrow \infty}} \angle [Arg(G(j\omega)) \Big|_{\omega \rightarrow \infty} - n90^\circ]$$

- Para $\omega=0$:

$$G'(j\omega)\Big|_{\omega=0} = \frac{|G(j\omega)|_{\omega=0}}{\omega^n\Big|_{\omega=0}} \angle [Arg(G(j\omega))\Big|_{\omega=0} - n90^\circ]$$

En conclusión, la adicción de n polos simples:

- Provoca un cambio de fase de $-n90^\circ$.
- La variación del módulo depende de la aparición o no de una indeterminación.



$$\frac{1}{1+j\omega T}$$

$$\frac{G(j\omega)}{j\omega}$$

$$\frac{G(j\omega)}{(j\omega)^2}$$

$$\frac{G(j\omega)}{(j\omega)^3}$$

Adición de ceros reales simples

$$(G'(s) = G(s)(1 + sT))$$

$$G'(j\omega) = G(j\omega)(1 + j\omega T) = |G(j\omega)|\sqrt{1 + \omega^2 T^2} \angle [Arg(G(j\omega)) + \arctg(\omega T)]$$

Comportamiento asintótico:

- Para $\omega \rightarrow \infty$:

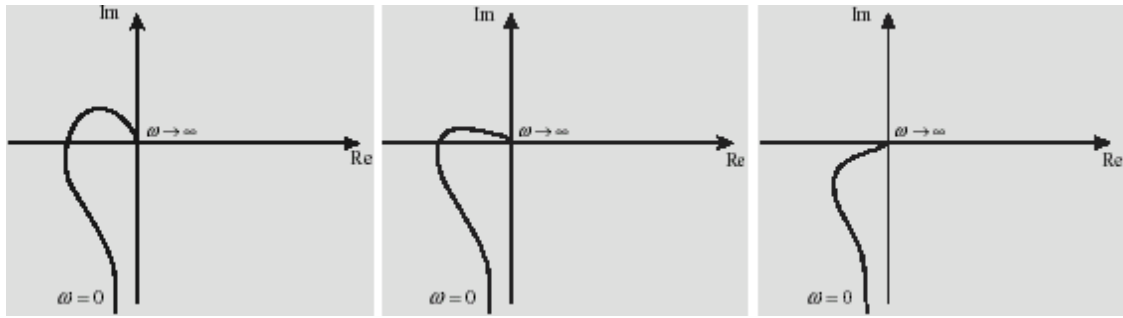
$$G'(j\omega)\Big|_{\omega \rightarrow \infty} = |G(j\omega)|\sqrt{1 + \omega^2 T^2}\Big|_{\omega \rightarrow \infty} \angle [Arg(G(j\omega))\Big|_{\omega \rightarrow \infty} + 90^\circ]$$

- Para $\omega=0$:

$$G'(j\omega)\Big|_{\omega=0} = |G(j\omega)\Big|_{\omega=0} \angle [Arg(G(j\omega))\Big|_{\omega=0} + 0^\circ]$$

En conclusión, la adicción de n ceros reales simples:

1. No afecta a bajas frecuencias.
2. Provoca un cambio de fase de $+90^\circ$ a altas frecuencias ($\omega \rightarrow \infty$)
3. Dado que un sistema generalmente tiene más polos que ceros el módulo tiende a anularse a altas frecuencias.



$$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega(1+j\omega T_1)(1+j\omega T_2)}$$

$$G(j\omega)(1+j\omega T_a)$$

$$G(j\omega)(1+j\omega T_a)(1+j\omega T_b)$$

Sistemas de segundo orden: polos complejos conjugados

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + \frac{2\delta s}{\omega_n} + 1} \Rightarrow G(j\omega) = \frac{1}{(j\omega)^2 + j\frac{2\delta\omega}{\omega_n} + 1} = \frac{1}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right) + j\frac{2\delta\omega}{\omega_n}}$$

Representación polar de $G(j)$:

$$G(j\omega) = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + 4\left(\frac{\delta\omega}{\omega_n}\right)^2}} \angle -\arctg\left(\frac{2\delta\omega/\omega_n}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}}\right)$$

Comportamiento asintótico:

- Para $\omega \rightarrow \infty$:

$$G(j\omega)\Big|_{\omega \rightarrow \infty} = \frac{1}{\omega^2/\omega_n^2} \Big|_{\omega \rightarrow \infty} \angle -180^\circ = 0 \angle -180^\circ$$

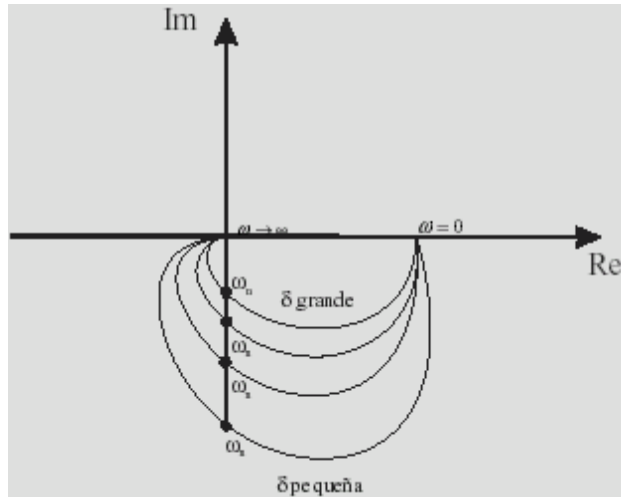
- Para $\omega = 0$:

$$G(j\omega)\Big|_{\omega=0} = 1 \angle 0^\circ$$

Corte con el eje imaginario:

$$\operatorname{Re}[G(j\omega)] = \frac{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(\frac{2\delta\omega}{\omega_n}\right)^2}} = 0 \Rightarrow \omega = \omega_n$$

El diagrama exacto entre $\omega=0$ y ω_n depende del parámetro



Sistemas de segundo orden: ceros complejos conjugados

$$G(s) = \frac{s^2}{\omega_n^2} + \frac{2\delta s}{\omega_n} + 1 \Rightarrow G(j\omega) = \frac{(j\omega)^2}{\omega_n^2} + j\frac{2\delta\omega}{\omega_n} + 1 = \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right) + j\frac{2\delta\omega}{\omega_n}$$

Representación polar de $G(j)$:

$$G(j\omega) = \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + 4\left(\frac{\delta\omega}{\omega_n}\right)^2} \angle \arctg\left(\frac{2\delta\omega/\omega_n}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}}\right)$$

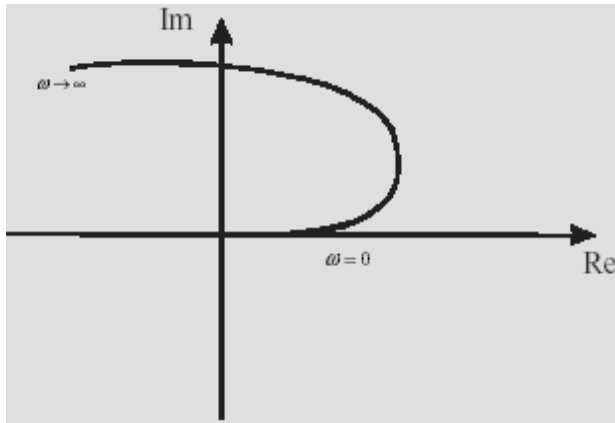
Comportamiento asintótico:

- Para $\omega \rightarrow \infty$:

$$G(j\omega) \Big|_{\omega \rightarrow \infty} = \infty \angle 180^\circ$$

- Para $\omega = 0$:

$$G(j\omega) \Big|_{\omega = 0} = 1 \angle 0^\circ$$



Parámetros representativos de la respuesta en frecuencia

Ancho de banda (AB): Frecuencia ω_c a la cual el módulo de la función respuesta en frecuencia $G(j\omega)$ toma el 70.7% de su valor a frecuencia cero. Es decir, marca una bajada de ganancia de 3dB respecto al valor para frecuencia nula.

Factor de resonancia (G_p): Valor máximo del módulo de $G(j\omega)$.

Frecuencia de resonancia (ω_p): Frecuencia a la que se produce el factor de resonancia.

Velocidad de corte (ν_c): Pendiente de la curva de amplitudes en la frecuencia de corte.

Unidad III

Estabilidad.

Definición de estabilidad

1. (Dominio del tiempo): Un sistema lineal es estable si su salida permanece acotada para cualquier entrada acotada.
2. (Dominio de la frecuencia): Un sistema lineal es estable si todos los polos de la función de transferencia están en la mitad izquierda del plano s .

Criterio de estabilidad de Nyquist

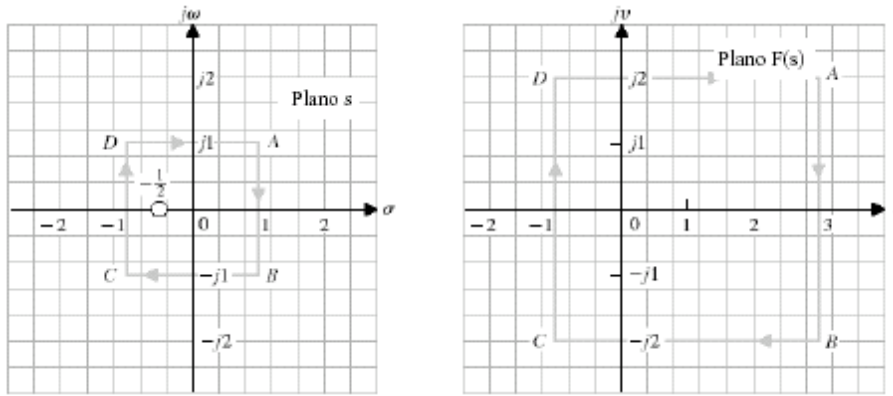
Criterio basado en la representación de la respuesta en frecuencia mediante el diagrama de Nyquist.

1. Facilita información sobre estabilidad absoluta.
2. Facilita información sobre estabilidad relativa y permite mejorarla.
3. Permite interpretar la respuesta en frecuencia.

Mapeo de contornos en el plano s

Sea un función $F(s)=2s+1$. Dado que s es una variable compleja ($s= u+ jv$) $F(s)$ será inherentemente compleja: $F(s)=u+ jv$.

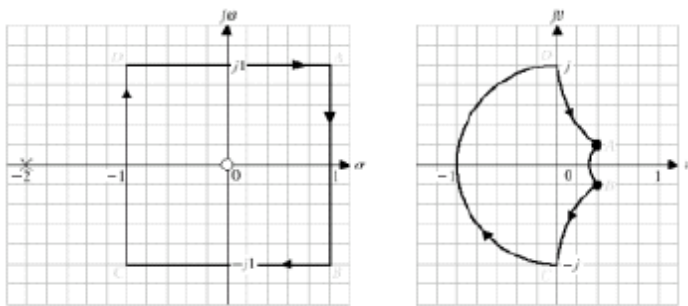
Ejemplo 1: $u+jv=F(s)=2s+1=2(+j)+1 \Rightarrow u=2+1, v=2$



Habitualmente trabajamos con funciones racionales de s

Ejemplo 2:

$$F(s) = \frac{s}{(s+2)}$$



Giro positivo = sentido de las agujas del reloj.

Giro negativo = sentido contrario al de las agujas del reloj.

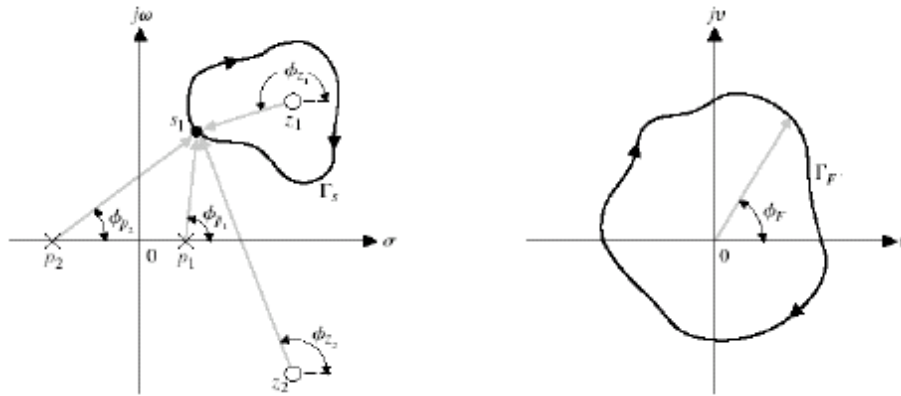
Sea por ejemplo

$$F(s) = \frac{(s+z_1)(s+z_2)}{(s+p_1)(s+p_2)}$$

Representación módulo-argumento:

$$F(s) = |F(s)| \angle F(s) = \begin{cases} |F(s)| = \frac{|s+z_1||s+z_2|}{|s+p_1||s+p_2|} \\ \angle F(s) = \left[\underbrace{\angle(s+z_1)}_{\varphi_1} + \underbrace{\angle(s+z_2)}_{\varphi_2} - \underbrace{\angle(s+p_1)}_{\varphi_3} - \underbrace{\angle(s+p_2)}_{\varphi_4} \right] \end{cases}$$

Mapeo de un contorno cerrado S en F



Si S es una curva cerrada que encierra un cero de $F(s)$! F también es una curva cerrada recorrida en el mismo sentido y que encierra el origen $s=0+j0$.

En general !

$$F(s) = \frac{(s + z_1)(s + z_2) \cdots (s + z_n)}{(s + p_1)(s + p_2) \cdots (s + p_m)}$$

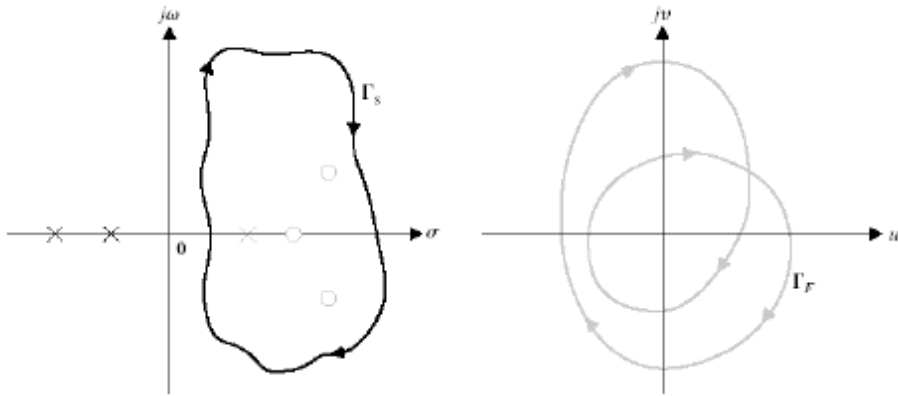
$$|F(s)| \angle F(s) = \begin{cases} |F(s)| = \frac{|s + z_1| \cdots |s + z_n|}{|s + p_1| \cdots |s + p_m|} \\ \angle F(s) = \left[\underbrace{\angle(s + z_1)}_{\varphi_{z1}} + \cdots + \underbrace{\angle(s + z_n)}_{\varphi_{zn}} - \underbrace{\angle(s + p_1)}_{\varphi_{p1}} - \cdots - \underbrace{\angle(s + p_2)}_{\varphi_{pm}} \right] \end{cases}$$

Principio del argumento:

El conjunto neto de giros positivos de F entorno al origen N , es igual a la diferencia entre el número de ceros n_Z y el número de polos n_P de $F(s)$ encerrados por S .

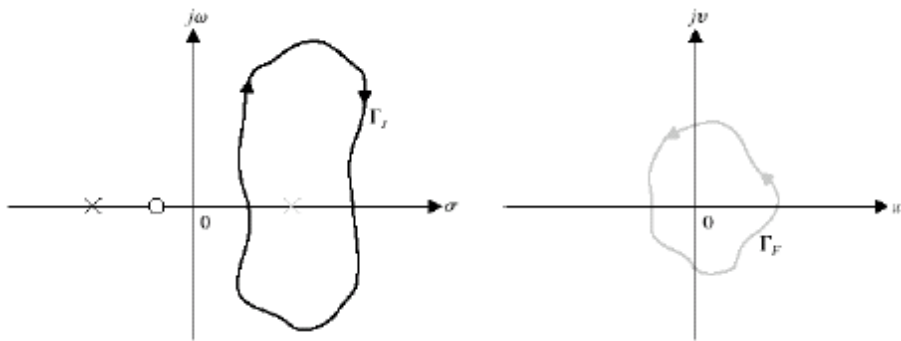
$$N = n_z - n_p$$

Ejemplo: Contorno que encierra tres ceros y un polo



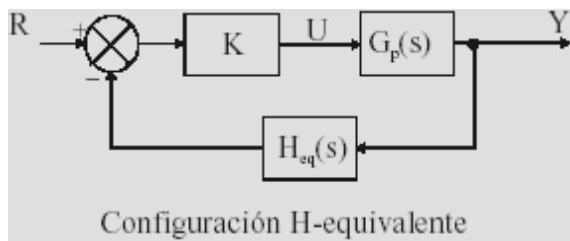
$$N = 3 - 1 = 2$$

Ejemplo: Contorno que encierra un polo



$$N = 0 - 1 = -1$$

Sea un sistema de partida $GP(s)$ sobre el que realizamos una realimentación obteniendo $M(s)$.



$$M(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{KG_p}{1 + KG_p H_{eq}}$$

Para el análisis de la estabilidad nos interesan los polos de $M(s)$! ceros de $1 + KG_p(s)H_{eq}(s)$. En particular nos interesa conocer el número de éstos situados en la mitad derecha del plano s.

Camino de Nyquist: Semicircunferencia de radio infinito que abarca toda la mitad derecha del plano s.

Sistemas reales ! Lazo de realimentación con más polos que ceros

!

$$\lim_{s \rightarrow \infty} [KG_p(s)H_{eq}(s)] = 0$$

!

$$\lim_{s \rightarrow \infty} [1 + KG_p(s)H_{eq}(s)] = 1$$

!

Es suficiente con estudiar la parte del contorno cerrado donde s no es infinito ! para $s=j\omega$ con $-\infty < \omega < +\infty$

Datos conocidos:

1. Función de lazo abierto $GP(s)$ usualmente factorizada.
2. Función de lazo de realimentación $KGP(s)H_{eq}(s)$.

Criterio de estabilidad de Nyquist:

Un sistema es estable si y sólo si el conjunto neto de giros positivos entorno al punto $s=1+j0$ por el diagrama de Nyquist reflejado de $KGP(s)H_{eq}(s)$ más el número de polos de $GP(s)$ en el semiplano derecho es cero.

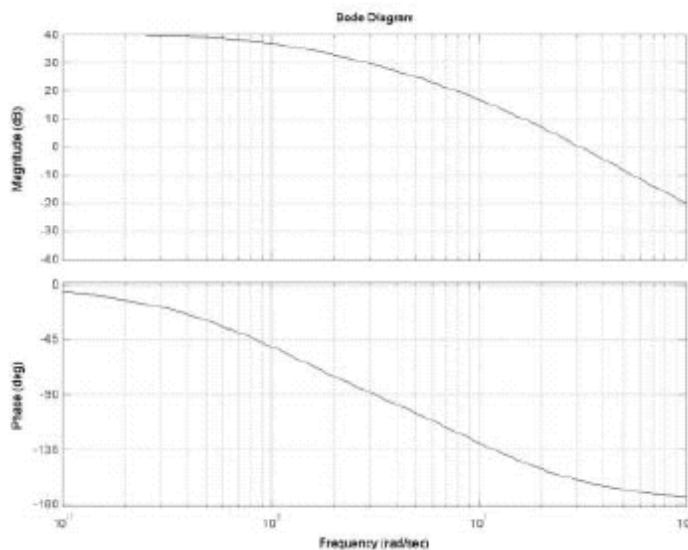
Polos de $1+KGP(s)H_{eq}(s)$! Ceros de $M(s)$! Polos de $GP(s)$

Ceros de $1+KGP(s)H_{eq}(s)$! Polos de $M(s)$

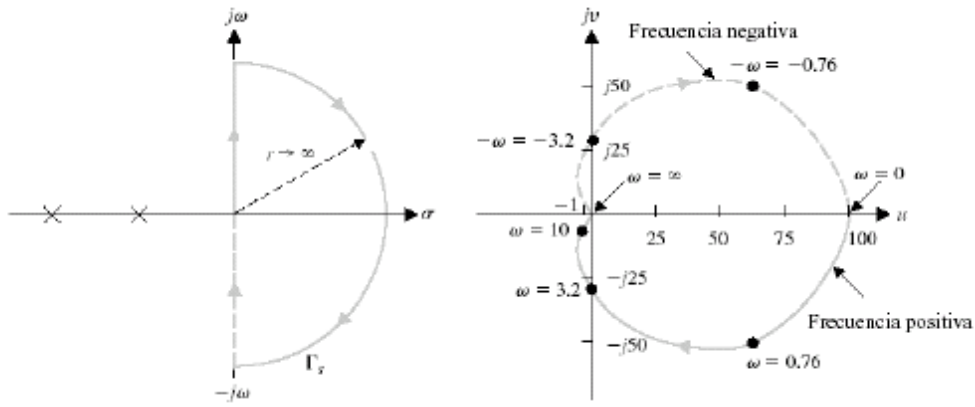
Ejemplo:

$$KG_p(s)H_{eq}(s) = \frac{10}{(s+1)(s+10)}$$

Diagramas de Bode para $KGP(s)H_{eq}(s)$:



Camino de Nyquist y mapeo de $KGP(s)H_{eq}(s)$:



$$N = n_z - n_p \Rightarrow n_z = n_p - N = 0 - 0 = 0$$

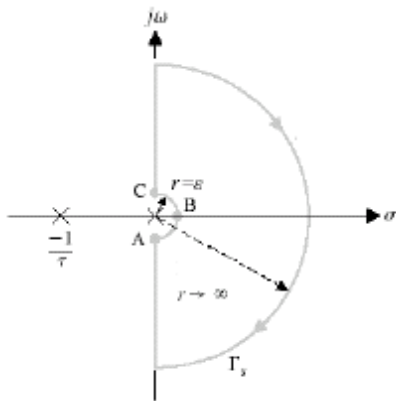
Ejemplo:

$$KG_p(s)H_{eq}(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

Polo en el origen ! El mapeo no está definido para $s=0$

Solución (camino de Nyquist modificado):

1. Dibujar el camino de Nyquist entre $\omega = 0$ y $\omega = -\infty$.
2. Unir los extremos mediante un semicírculo de radio ϵ .
3. Hacer tender ϵ a cero.

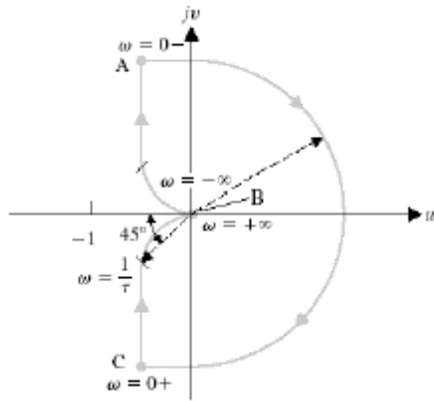


Semicírculo pequeño !

Proyección sobre $KG_p(s)H_{eq}(s)$:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} [KG_p(s)H_{eq}(s)]_{s=\epsilon e^{j\theta}} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon e^{j\theta} (\epsilon e^{j\theta} + 1)} = \infty e^{-j\theta}$$

Semicírculo de radio infinito que varía en sentido contrario a .



Estabilidad relativa

Punto crítico ($s = -1 + j0$):

1. Marca la frontera entre la estabilidad y la inestabilidad de un sistema.
2. Cuando el diagrama de Nyquist pasa por él, la respuesta en el tiempo del sistema es sinusoidal.

$$KG_p(s)H_{eq}(s)\Big|_{s=j\omega_c} = -1 \Rightarrow 1 + KG_p(s)H_{eq}(s)\Big|_{s=j\omega_c} = 0$$

Sea un sistema realimentado $M(s)$

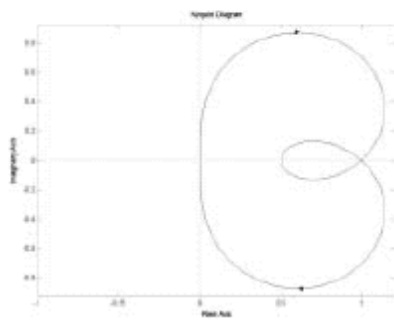
$$M(s) = \frac{KG_p(s)}{1 + KG_p(s)H_{eq}(s)} \quad \text{donde} \quad \begin{cases} G_p(s) = \frac{s+1}{s^2 + s + 2} \\ H_{eq}(s) = 1 \end{cases}$$

$$KH_{eq}(s)G_p(s) = \frac{K(s+1)}{s^2 + s + 2} \quad \Downarrow \quad M(s) = \frac{K(s+1)}{s^2 + s(1+K) + 2 + K}$$

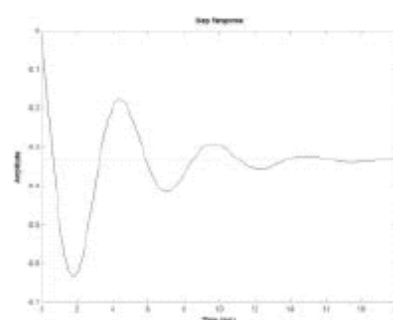
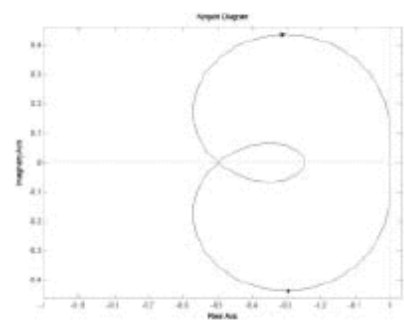
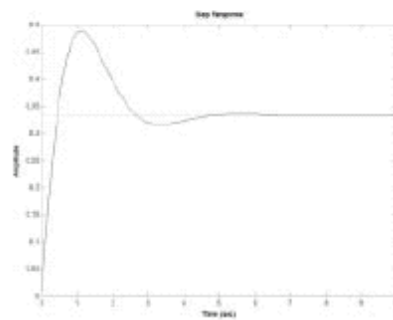
▪ $K=1$

▪ $K=-0.5$

Nyquist



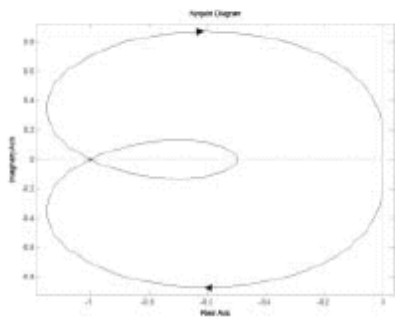
Respuesta escalón



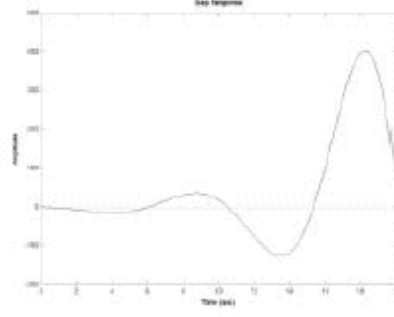
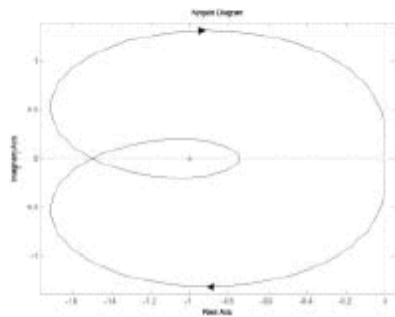
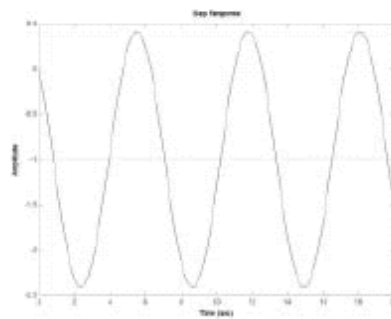
▪ $K=-1$

▪ $K=-1.5$

Nyquist



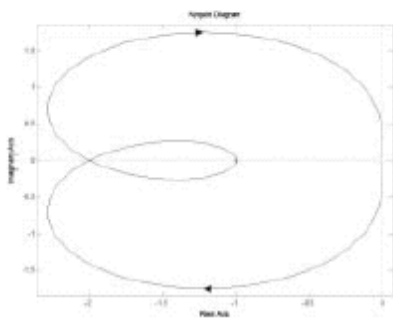
Respuesta escalón



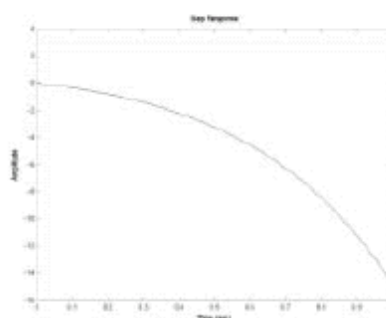
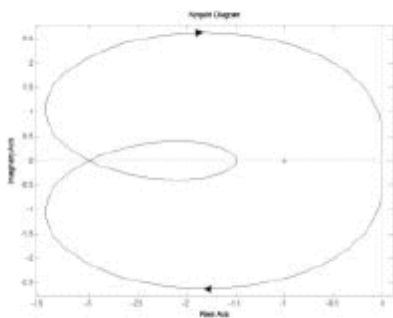
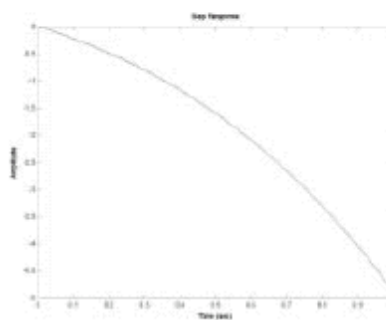
▪ $K=-2$

▪ $K=-3$

Nyquist



Respuesta escalón



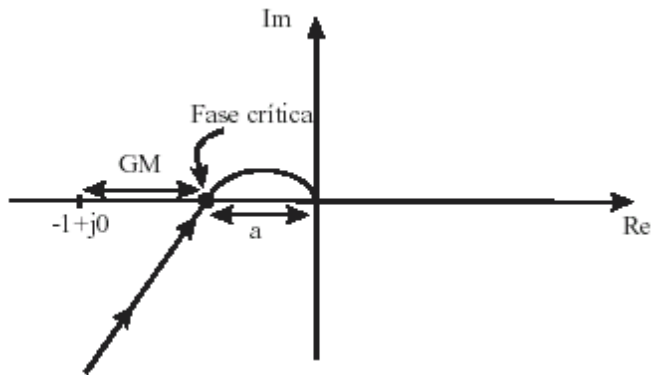
- *Punto de ganancia crítica:* Punto para el cual la amplitud de la función respuesta en frecuencia $A(j)$ es la unidad (i. e. 0 dB).
- *Punto de fase crítica:* Punto para el cual la fase de la función respuesta en frecuencia $A(j)$ es -180 .

A partir de estos puntos se definen medidas de proximidad al punto crítico:

1. *Margen de amplitud (GM):* Distancia entre el punto crítico y el punto de fase crítica.

$$GM = 20 \log \frac{1}{a} = 20 \log \frac{1}{|KG_p(j\omega_c)H_{eq}(j\omega_c)|} dB$$

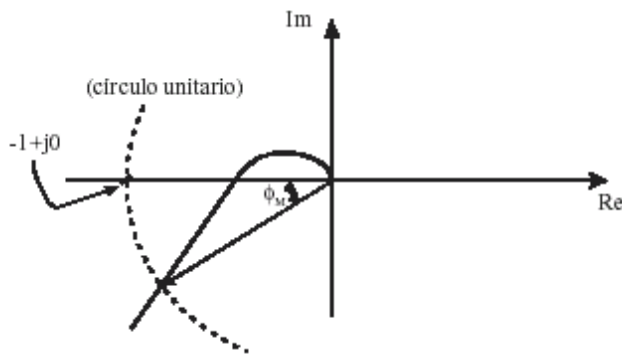
Representación gráfica mediante el diagrama de Nyquist del margen de ganancia.



Si $GM < 0$! el diagrama de Nyquist rodea al punto crítico ! el sistema es inestable*

*Esto es cierto siempre que el sistema en lazo abierto $G_p(s)$ no presente polos con parte real positiva.

2. *Margen de fase*: Distancia (angular) entre el punto crítico y el punto de ganancia crítica. Representa el ángulo M que debe girarse el diagrama para que el punto de ganancia crítica pase por el punto crítico.

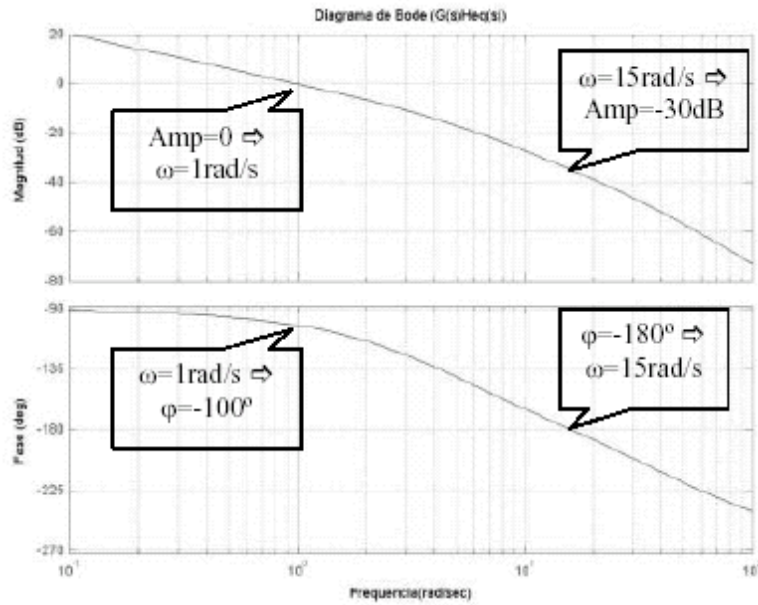


$M > 0$! Giro en el sentido de las agujas del reloj (sistema ya estable).

$M < 0$! Giro en el sentido contrario al de las agujas del reloj (sistema inestable).

Estabilidad relativa a partir del diagrama de Bode

$$\begin{aligned} KG_p(s)H_{eq}(s) &= \frac{K}{s(s/5+1)(s/50+1)} \\ &= \frac{K}{s(s/5+1)(s/50+1)} \end{aligned}$$

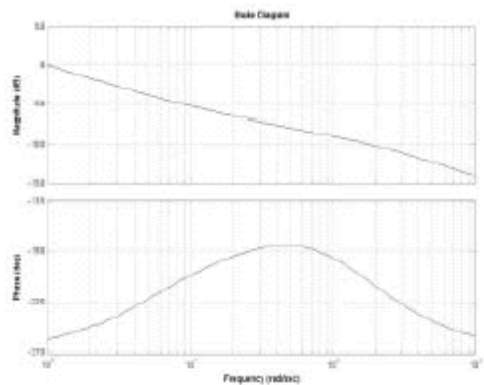


Estabilidad condicional

Sistema condicionalmente estable: Sistema que pasa de situaciones estables a inestables múltiples veces a medida que aumenta su ganancia.

Ejemplo:

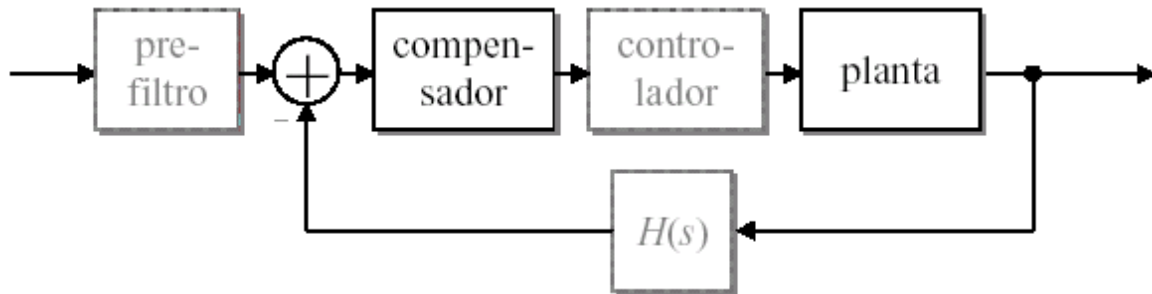
$$A(s) = KH_{eq}(s)G_p(s) = \frac{100K(s+5)(s+40)}{s^3(s+100)(s+200)}$$



Unidad IV.

Compensación.

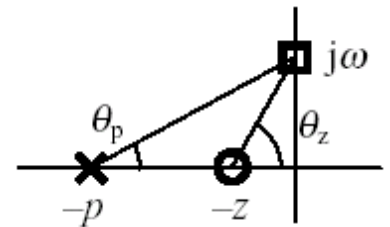
- Para estabilizar o mejorar la respuesta de un sistema, podemos compensarlo añadiéndole polos y/o ceros.



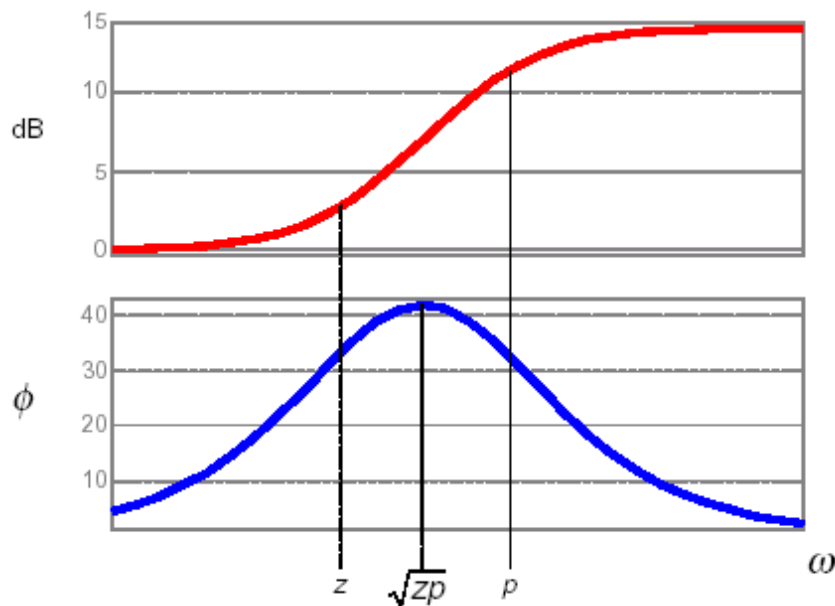
- Las cajas entrecortadas se pueden considerar como compensadores también.
- Con circuitos activos, se pueden realizar funciones de transferencia arbitrarias (por lo menos en teoría).
- Con circuitos pasivos, sólo se puede un subconjunto.
- Ventaja: no hace falta fuente de adicional de potencia.

Compensador de Adelanto en Fase

$$G_c(s) = K \frac{s + z}{s + p}, \quad \text{donde } |z| < |p|$$



- Como $z > p$, la contribución neta al ángulo es positiva en $s = j\omega$! Adelanta la fase.
- Aproxima al diferenciador, lo cual mejora la respuesta transitoria.

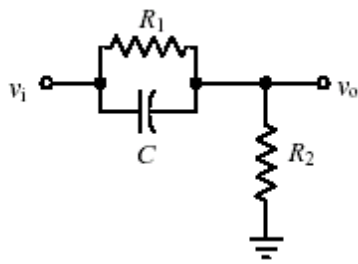


Diseño del Compensador de Adelanto en Fase

1. Colocamos el cero $-z$ arbitrariamente en el eje real (si la planta tiene un polo real indeseado, podemos poner el cero cancelando a ese polo).

2. Calculamos el polo $-p$ tirando rayos desde los polos y ceros del compensador en serie con la planta, hasta el polo dominante deseado del lazo cerrado. De la condición angular se obtiene p .

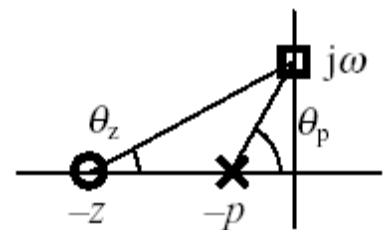
Realización:



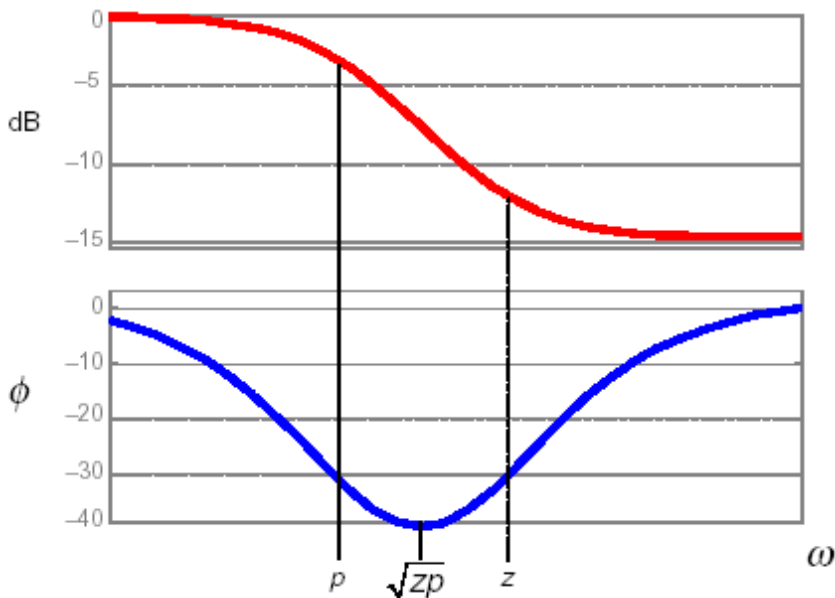
$$G_c(s) = \frac{s + \frac{1}{R_1 C}}{s + \left(\frac{1}{R_1 C} + \frac{1}{R_2 C} \right)}$$

Compensador de Atraso en Fase

$$G_c(s) = K \frac{s + z}{s + p}, \quad \text{donde } |p| < |z|$$



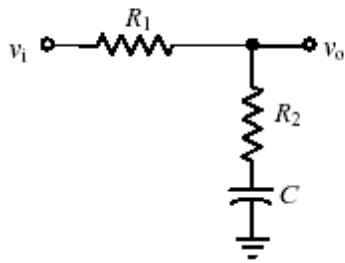
- Como $p > z$, la contribución neta al ángulo es negativa en $s=j\omega$! Atrasa la fase.
- Aproxima al integrador, lo cual mejora el error en régimen permanente.



Diseño del Compensador de Atraso en Fase

- Usualmente se ponen el polo $-p$ y el cero $-z$ cerca del origen, casi cancelándose.
- No se puede atrasar mucho la fase porque esto tiende a desestabilizar al sistema.

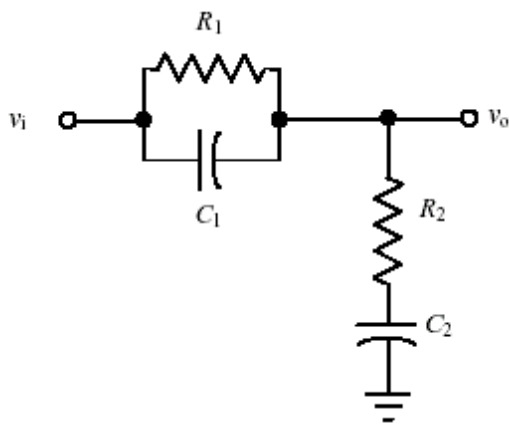
Realización:



$$G_c(s) = \frac{s + \frac{1}{R_2 C}}{s + \frac{1}{(R_1 + R_2)C}}$$

Red de Adelanto–Atraso

- Beneficio del compensador de adelanto (mejor respuesta transitoria) y del compensador de atraso (mejor respuesta permanente) a la misma vez.



Conclusión.

Como conclusión puedo decir que el estudiar los sistemas de control me ha ayudado a comprender más el funcionamiento de un sistema, una planta, un mecanismo. Además, también mencionare que es necesario saber controlar las variables de diversos sistemas, ya que estos conocimientos nos ayudaran a realizar un buen papel en la industria, ya sea que al salir de esta Institución Superior vendamos nuestros servicios o seamos dueños de nuestra propia empresa.

Referencias Bibliográficas.

14

Pagina